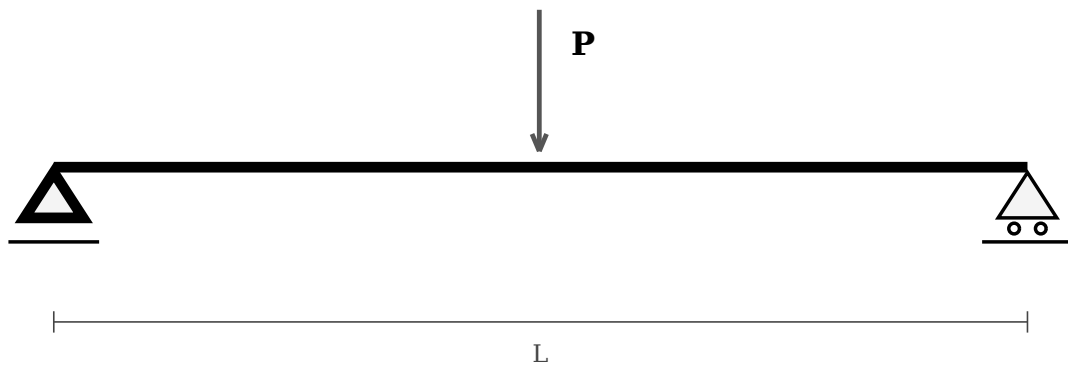


GÉNIE MÉCANIQUE

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Guide de calcul illustré

Dix cas pratiques résolus



Christ Wanys Moufouba Naim

moufoubanaim.com

Octobre 2026

Version 1.1

PRÉSENTATION

1. Introduction

Guide destiné à l'initiation et au premier cycle universitaire.

1. Objet et portée

Chaque cas commence par un modèle simple. Les schémas montrent les charges extérieures ; les calculs donnent ensuite les réactions, les efforts internes et la réponse de la pièce.

2. Le domaine de validité

Matériaux homogènes et élastiques linéaires, petites déformations et chargements statiques. Pour les poutres : modèle d'Euler-Bernoulli, poutres élancées et rigidité EI constante. Poids propre négligé sauf s'il est inclus dans q .

3. Démarche de résolution

La résolution repose sur le diagramme du corps libre, le choix d'un système d'unités cohérent et la vérification des résultats obtenus. Les valeurs de E , G et α sont des données d'exercice, sans grade de matériau certifié.

TABLE DES MATIÈRES

01	Traction d'une barre	4
02	Barre à deux sections	5
03	Dilatation thermique bloquée	6
04	Torsion d'un arbre plein	7
05	Torsion d'un arbre creux	8
06	Poutre, force au centre	9
07	Poutre, force décentrée	10
08	Poutre, charge uniforme	11
09	Console, force en bout	12
10	Console, charge uniforme	13

Ouvrage pédagogique original préparé pour moufoubanaim.com. Les schémas ne sont pas à l'échelle. Les calculs nominaux ne constituent pas un dimensionnement complet de pièces réelles.

REPÈRES

Unités, signes et méthode

Une convention cohérente rend les équations plus faciles à vérifier.

1. Utiliser N, mm et MPa

1 MPa = 1 N/mm² ; 1 GPa = 1 000 MPa ; 1 kN = 1 000 N ; 1 N·m = 1 000 N·mm. Avec ces unités, E et G sont en MPa, I et J en mm⁴.

$$[M] = \text{N} \cdot \text{mm}, \quad \left[\frac{ML^2}{EI} \right] = \text{mm}$$

2. Définir les symboles

N : effort normal ; V : effort tranchant ; M : moment fléchissant ; T : couple ; E : module de Young ; G : module de cisaillement ; α : dilatation linéaire. A : aire ; I : moment quadratique de flexion ; J : moment polaire.

σ : contrainte normale ; τ : cisaillement ; δ : allongement ; θ : rotation.

3. Fixer les signes

N > 0 en traction. Pour une coupe de poutre, sur la portion gauche isolée : V positif vers le bas à la coupe, M positif antihoraire (flexion en sourire). x part de l'appui gauche. q est positif vers le bas.

$$\frac{dM}{dx} = V, \quad \frac{dV}{dx} = -q, \quad EI \frac{d^2v}{dx^2} = M$$

4. Interpréter les résultats

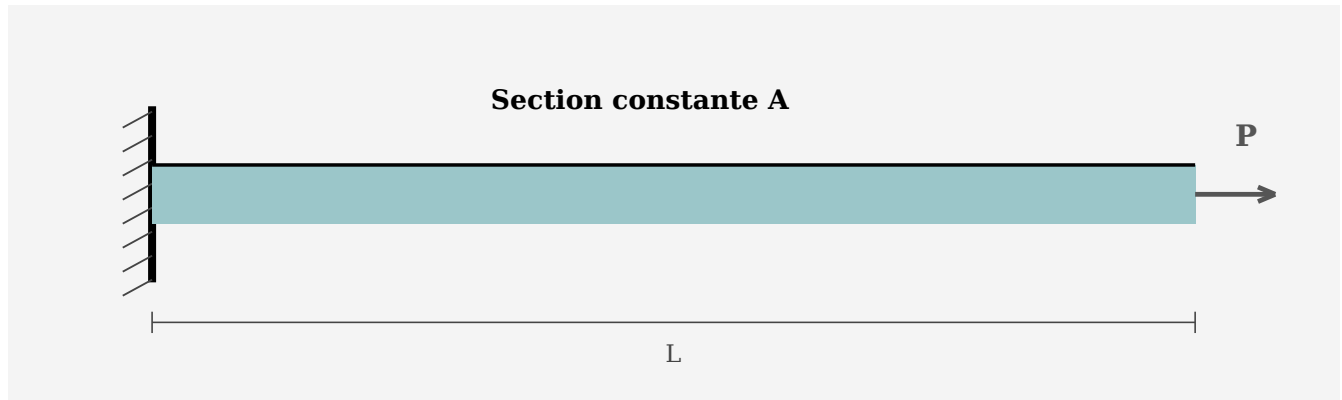
Les flèches f sont présentées comme des valeurs absolues vers le bas. En flexion simple, la contrainte normale varie linéairement avec la distance à l'axe neutre ; le guide rapporte surtout sa valeur maximale absolue.

Équilibre → coupe → effort interne → contrainte → déformation.

CAS 01

Traction d'une barre

Une tige de liaison transmet un effort axial centré.



Données. $P = 20 \text{ kN}$; $L = 1\,000 \text{ mm}$; $A = 200 \text{ mm}^2$; $E = 200\,000 \text{ MPa}$.

1. Isoler et couper

La réaction à gauche vaut 20 kN vers la gauche. Une coupe quelconque donne un effort normal constant, positif en traction.

$$N = P = 20\,000 \text{ N}$$

2. Calculer la contrainte

La contrainte nominale est uniforme loin de la fixation et des zones d'application de la charge.

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{20\,000}{200} = 100 \text{ MPa}$$

3. Calculer l'allongement

La loi de Hooke relie la déformation longitudinale à la contrainte. L'allongement s'obtient en multipliant cette déformation par la longueur initiale.

$$\delta = \frac{PL}{EA} = \frac{20\,000 \times 1\,000}{200\,000 \times 200} = 0,500 \text{ mm}$$

$N(x)$



$\sigma(x)$



$\delta(x)$ total



Profiles qualitatifs ; amplitudes normalisées indépendamment.

Résultat et interprétation

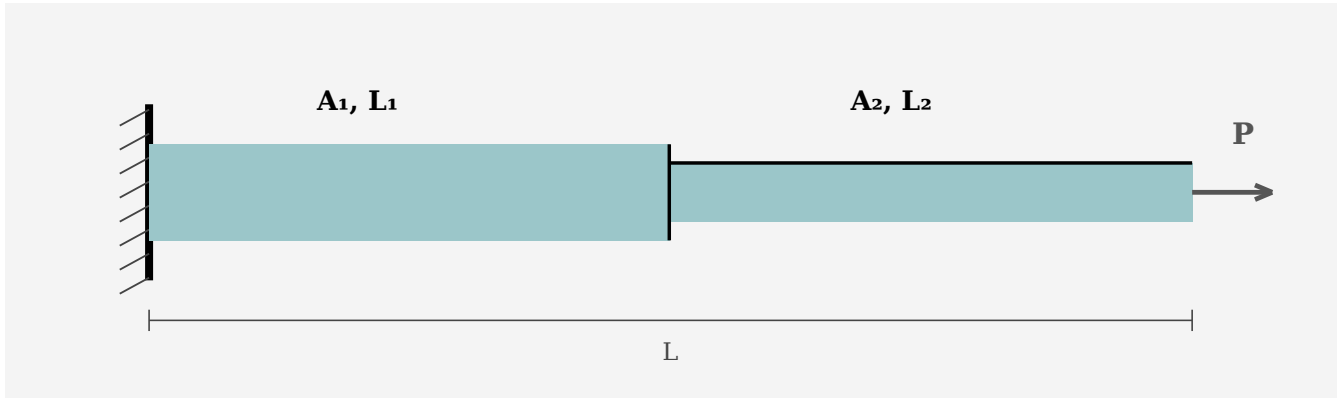
100 MPa ; allongement de $0,500 \text{ mm}$

Point de vigilance. Confondre kN et N produit une erreur d'un facteur $1\,000$. La valeur $E = 200 \text{ GPa}$ vaut $200\,000 \text{ MPa}$.

CAS 02

Barre à deux sections

Deux tronçons en série portent le même effort axial.



Données. $P = 30 \text{ kN}$; $E = 200\,000 \text{ MPa}$; $L_1 = L_2 = 500 \text{ mm}$; $A_1 = 300 \text{ mm}^2$; $A_2 = 150 \text{ mm}^2$.

1. Trouver les efforts

Aucune charge intermédiaire : l'équilibre de chaque tronçon impose le même effort normal.

$$N_1 = N_2 = 30\,000 \text{ N}$$

2. Comparer les contraintes

La petite section est la plus sollicitée. Les valeurs sont nominales, hors concentration de contrainte à l'épaulement.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 100 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 200 \text{ MPa}$$

3. Additionner les déformations

L'allongement total correspond à la somme des allongements des deux tronçons.

$$\delta = \sum_i \frac{N_i L_i}{E_i A_i} = 0,250 + 0,500 = 0,750 \text{ mm}$$

$N(x)$



$\sigma(x)$



$\delta(x) \text{ total}$



Profils qualitatifs ; amplitudes normalisées indépendamment.

Résultat et interprétation

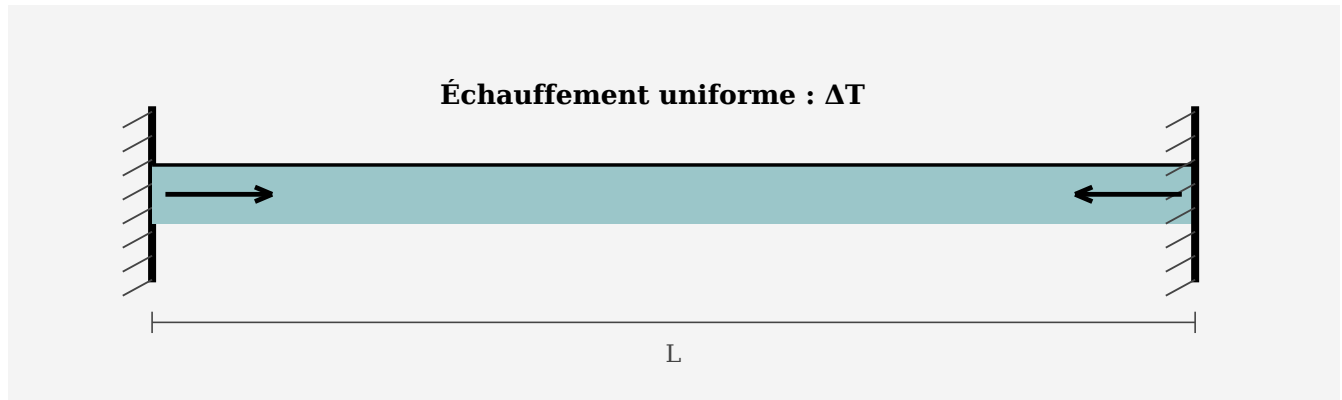
Section critique : A_2 ; $\delta \text{ total} = 0,750 \text{ mm}$

Point de vigilance. Une aire moyenne ne remplace pas le calcul tronçon par tronçon. Un congé réel demande aussi une analyse locale.

CAS 03

Dilatation thermique bloquée

Une barre ne peut pas s'allonger entre deux butées rigides.



Données. $L = 1\,000\text{ mm}$; $A = 200\text{ mm}^2$; $E = 200\,000\text{ MPa}$; $\alpha = 12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$; $\Delta T = +40\text{ }^\circ\text{C}$.

1. Imaginer la dilatation libre

Sans butées, la barre s'allongerait sous l'effet de la température.

$$\delta_{\text{libre}} = \alpha \Delta T L = 0,480\text{ mm}$$

2. Imposer la compatibilité

Le déplacement total est nul. Une déformation mécanique négative compense exactement la dilatation thermique.

$$0 = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T \implies \sigma = -E\alpha \Delta T = -96\text{ MPa}$$

3. Dédire les réactions

Le signe négatif indique la compression. Chaque butée exerce une force dirigée vers la barre.

$$N = \sigma A = -19\,200\text{ N}, \quad |R| = 19,2\text{ kN}$$

N(x)

 $\sigma(x)$ $\delta(x)$ total

Profils qualitatifs ; amplitudes normalisées indépendamment.

Résultat et interprétation

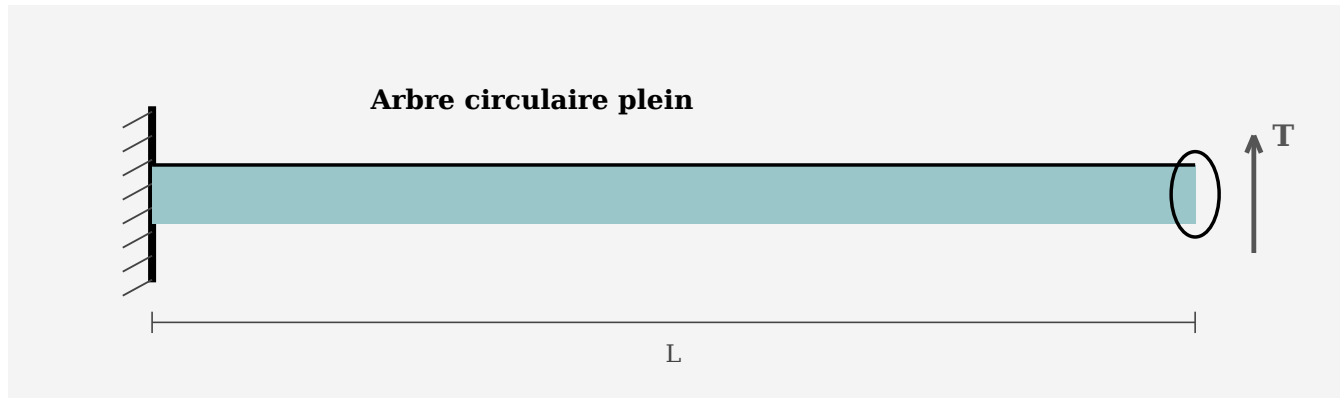
Compression de 96 MPa ; déplacement nul

Point de vigilance. δ total = 0 ne signifie pas $\sigma = 0$. Hypothèses : butées indéformables, aucun jeu et pas de flambement.

CAS 04

Torsion d'un arbre plein

Un arbre circulaire transmet un couple constant.



Données. $T = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$; $L = 1\,000 \text{ mm}$; $d = 40 \text{ mm}$; $G = 80\,000 \text{ MPa}$.

1. Équilibre et géométrie

Le couple interne a une intensité de $500 \text{ N}\cdot\text{m}$. Le moment quadratique polaire caractérise la géométrie de la section en torsion circulaire.

$$T = 500\,000 \text{ N mm}, \quad J = \frac{\pi d^4}{32} = 251\,327 \text{ mm}^4$$

2. Calculer le cisaillement

La contrainte augmente linéairement avec le rayon et atteint son maximum à la surface extérieure, située à 20 mm de l'axe.

$$\tau_{\max} = \frac{T(d/2)}{J} = 39,79 \text{ MPa}$$

3. Calculer la rotation

Le couple, la section et G sont constants. La formule donne un angle en radians.

$$\theta = \frac{TL}{GJ} = 0,02487 \text{ rad} = 1,425^\circ$$

$T(x)$



$\tau(r)$, dans la matière



$\theta(x)$



Profils qualitatifs ; amplitudes normalisées indépendamment.

Résultat et interprétation

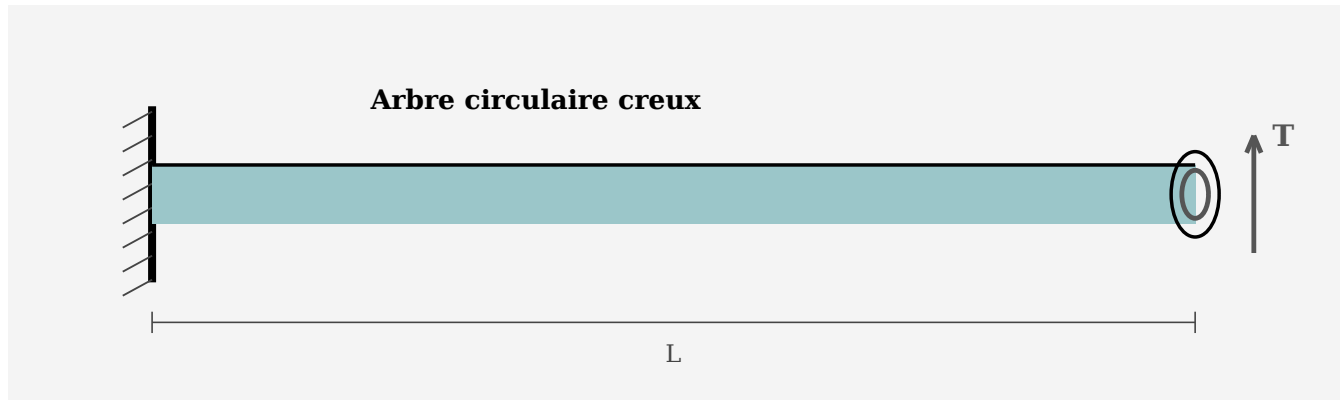
$\tau_{\max} = 39,79 \text{ MPa}$; rotation de $1,425^\circ$

Point de vigilance. Ne pas utiliser $I = \pi d^4/64$ à la place de J. Ces expressions supposent un arbre circulaire en élasticité linéaire.

CAS 05

Torsion d'un arbre creux

Évaluer la rigidité et la contrainte d'un tube en torsion.



Données. $T = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$; $L = 1\,000 \text{ mm}$; $D = 50 \text{ mm}$; $d = 30 \text{ mm}$; $G = 80\,000 \text{ MPa}$.

1. Calculer la section résistante

Soustraire le moment polaire du vide à celui du disque extérieur.

$$J = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = 534\,071 \text{ mm}^4$$

2. Trouver la contrainte maximale

Le rayon extérieur vaut 25 mm. Le vide intérieur ne porte aucune contrainte.

$$\tau_{\max} = \frac{TD}{2J} = 23,41 \text{ MPa}$$

3. Trouver l'angle de torsion

Utiliser le même couple en $\text{N}\cdot\text{mm}$ que dans le cas précédent.

$$\theta = \frac{TL}{GJ} = 0,01170 \text{ rad} = 0,671^\circ$$

$T(x)$



$\tau(r)$, dans la matière



$\theta(x)$



Profiles qualitatifs ; amplitudes normalisées indépendamment.

Résultat et interprétation

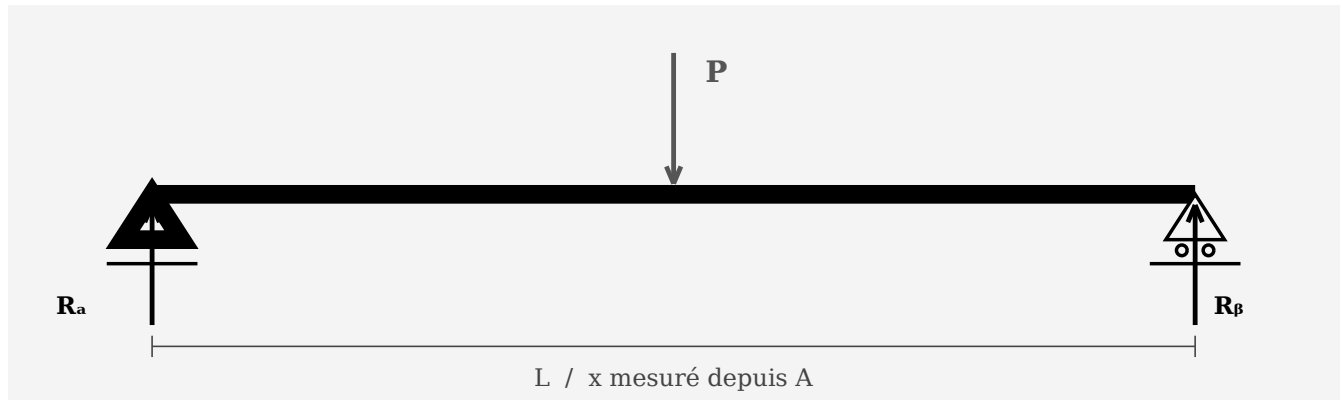
$\tau_{\max} = 23,41 \text{ MPa}$; rotation de $0,671^\circ$

Point de vigilance. Le tube de ce cas a un diamètre extérieur supérieur à celui du cas 04 : la comparaison n'est pas faite à masse égale.

CAS 06

Poutre, force au centre

Une poutre sur deux appuis porte une charge ponctuelle.



Données. $P = 10 \text{ kN}$; $L = 2\,000 \text{ mm}$; $E = 200\,000 \text{ MPa}$; $b = 50 \text{ mm}$; $h = 100 \text{ mm}$ (vertical).

1. Calculer les réactions

La symétrie et l'équilibre vertical donnent deux réactions égales.

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} = 5 \text{ kN}$$

2. Construire V et M

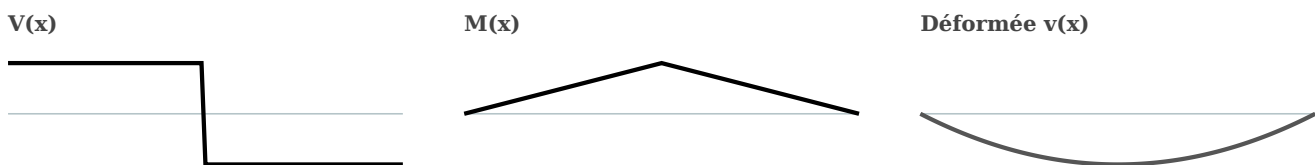
L'effort tranchant vaut $+5 \text{ kN}$ avant la charge et -5 kN après celle-ci. Le moment varie linéairement et atteint son maximum au centre.

$$M_{\max} = \frac{PL}{4} = 5\,000\,000 \text{ N mm}$$

3. Contrainte et flèche

Le moment quadratique de la section vaut $4,167 \times 10^6 \text{ mm}^4$ et la distance à la fibre extrême vaut 50 mm . La flèche maximale se situe au centre.

$$|\sigma|_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I} = 60,0 \text{ MPa}, \quad f_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} = 2,000 \text{ mm}$$



Profils qualitatifs ; amplitudes normalisées indépendamment.

Résultat et interprétation

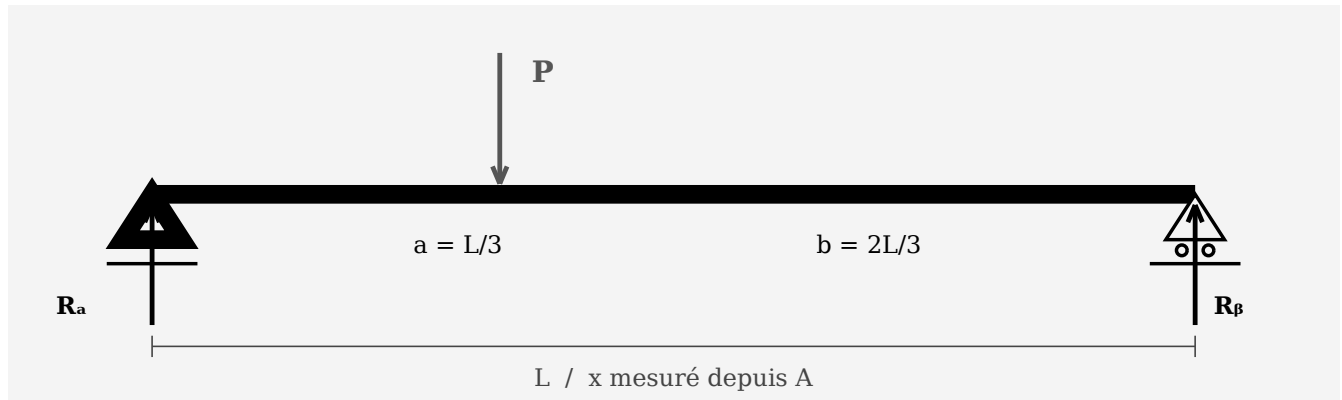
$M_{\max} = 5,00 \text{ kN} \cdot \text{m}$; flèche de $2,000 \text{ mm}$

Point de vigilance. La hauteur h est perpendiculaire à l'axe neutre de flexion. Permuter b et h change fortement la rigidité.

CAS 07

Poutre, force décentrée

La charge se situe au tiers de la portée.



Données. $P = 12 \text{ kN}$; $L = 3\,000 \text{ mm}$; $a = 1\,000 \text{ mm}$; $b = 2\,000 \text{ mm}$; $E = 200\,000 \text{ MPa}$; $I = 8 \times 10^6 \text{ mm}^4$.

1. Équilibrer les moments

Le moment des forces autour de A donne $R_B L = Pa$. Puis $R_A + R_B = P$.

$$R_A = \frac{Pb}{L} = 8 \text{ kN}, \quad R_B = \frac{Pa}{L} = 4 \text{ kN}$$

2. Écrire les efforts par morceaux

L'effort tranchant vaut $+8 \text{ kN}$ avant la charge et -4 kN après celle-ci. Le moment varie linéairement entre les appuis et le point chargé.

$$M_{\max} = \frac{Pab}{L} = 8,00 \text{ kN m}$$

3. Calculer la flèche sous P

L'intégration de $EI v'' = M$, avec $v(0) = v(L) = 0$ et continuité en a, donne cette valeur absolue au point chargé.

$$f(a) = \frac{Pa^2b^2}{3EIL} = 3,333 \text{ mm}$$



Profils qualitatifs ; amplitudes normalisées indépendamment.

Résultat et interprétation

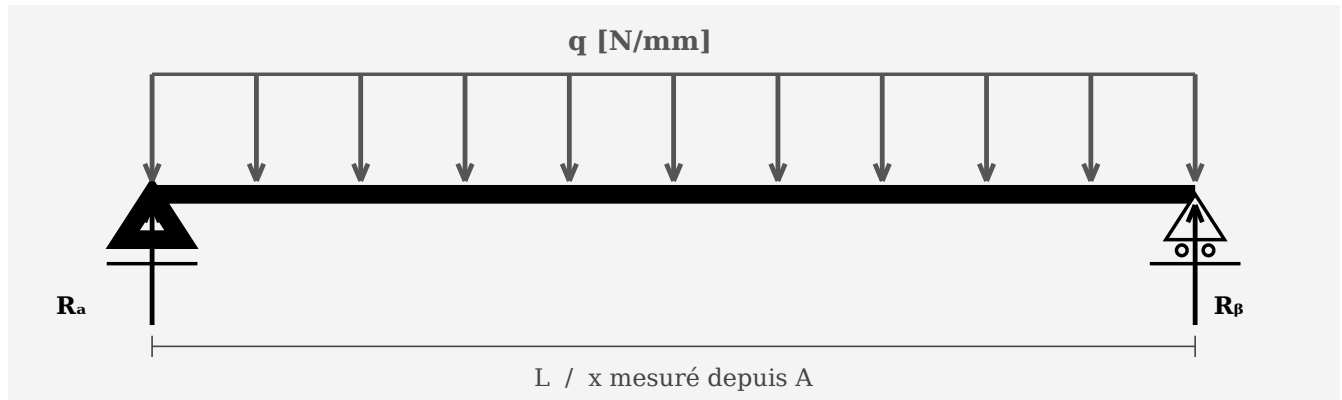
$$R_A = 8 \text{ kN} ; R_B = 4 \text{ kN} ; f(a) = 3,333 \text{ mm}$$

Point de vigilance. La flèche sous la charge n'est pas forcément la flèche maximale. Ici, celle-ci se situe à $x \approx 1\,367 \text{ mm}$ depuis A.

CAS 08

Poutre, charge uniforme

Une charge répartie couvre toute la portée.



Données. $q = 2 \text{ N/mm}$ ($= 2 \text{ kN/m}$) ; $L = 3\,000 \text{ mm}$; $E = 200\,000 \text{ MPa}$; $I = 8 \times 10^6 \text{ mm}^4$.

1. Remplacer la charge pour l'équilibre

La résultante qL agit au milieu. Ce remplacement sert aux réactions globales, pas à la forme des efforts internes.

$$R_A = R_B = \frac{qL}{2} = 3 \text{ kN}$$

2. Couper à la position x

Sur la partie gauche, la charge répartie vaut qx et agit au milieu de la portion isolée.

$$V(x) = \frac{qL}{2} - qx, \quad M(x) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

3. Chercher les maxima

$V = 0$ au centre, où M est maximal. La flèche maximale est également au centre par symétrie.

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{8} = 2,25 \text{ kNm}, \quad f_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} = 1,318 \text{ mm}$$

$V(x)$



$M(x)$



Déformée $v(x)$



Profil qualitatifs ; amplitudes normalisées indépendamment.

Résultat et interprétation

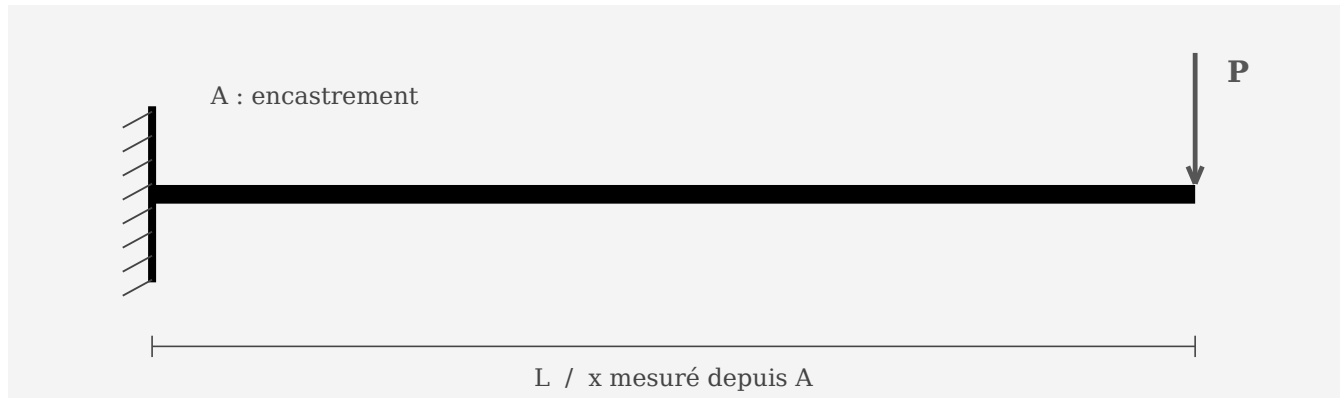
Moment parabolique ; flèche de 1,318 mm

Point de vigilance. q est une force par unité de longueur. $2 \text{ kN/m} = 2 \text{ N/mm}$, et non $2\,000 \text{ N/mm}$.

CAS 09

Console, force en bout

Une poutre encastrée reçoit une force à son extrémité libre.



Données. $P = 1 \text{ kN}$; $L = 1\,000 \text{ mm}$; $E = 200\,000 \text{ MPa}$; $b = 40 \text{ mm}$; $h = 80 \text{ mm}$ (vertical).

1. Trouver les réactions

L'encastrement reprend la force verticale et un moment. Le moment de réaction est antihoraire pour la charge dessinée.

$$R_A = P = 1 \text{ kN}, \quad C_A = PL = 1 \text{ kNm}$$

2. Repérer la section critique

L'effort tranchant vaut $+1 \text{ kN}$ sur toute la portée. Le moment varie linéairement, de $-1 \text{ kN}\cdot\text{m}$ en A à zéro au bout libre.

$$|M|_{\max} = PL = 1\,000\,000 \text{ Nmm}$$

3. Contrainte et déplacement

Le moment quadratique de la section vaut $1,707 \times 10^6 \text{ mm}^4$ et la distance à la fibre extrême vaut 40 mm . La flèche maximale est au bout libre.

$$|\sigma|_{\max} = \frac{PLc}{I} = 23,44 \text{ MPa}, \quad f_{\max} = \frac{PL^3}{3EI} = 0,977 \text{ mm}$$

V(x)

M(x)

Déformée v(x)



Profils qualitatifs ; amplitudes normalisées indépendamment.

Résultat et interprétation

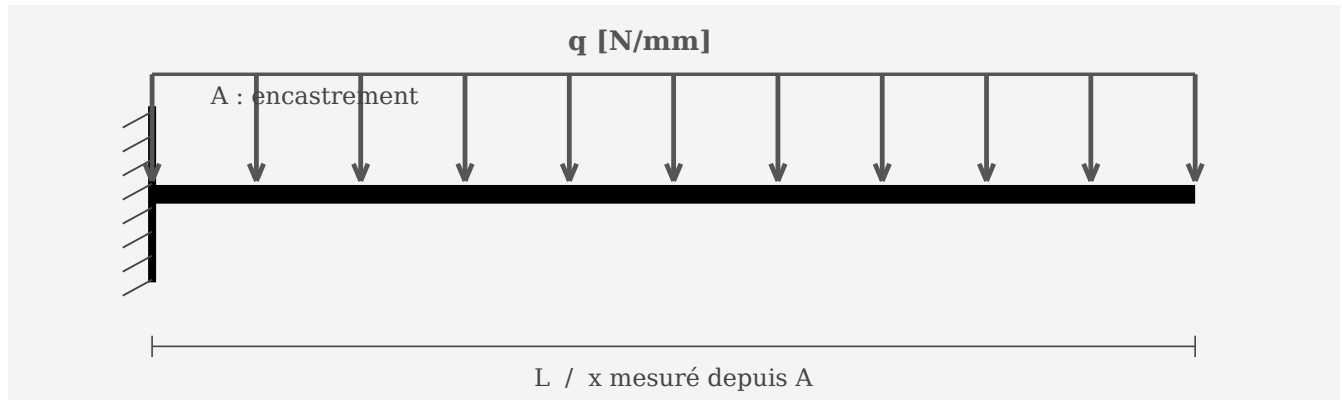
Section critique en A ; flèche de $0,977 \text{ mm}$

Point de vigilance. Un encastrement transmet un moment. Le remplacer par une articulation rendrait ce modèle instable.

CAS 10

Console, charge uniforme

Une console porte une charge répartie sur toute sa longueur.



Données. $q = 1$ N/mm ; $L = 1\,200$ mm ; $E = 200\,000$ MPa ; $I = 3 \times 10^6$ mm⁴.

1. Réduire le chargement

La force équivalente qL se situe à mi-longueur de l'encastrement.

$$R_A = qL = 1,2 \text{ kN}, \quad C_A = \frac{qL^2}{2} = 0,72 \text{ kN m}$$

2. Couper depuis le bout libre

Sur la portion libre après une coupe à x , la longueur chargée vaut $L-x$. Avec les conventions du guide :

$$V(x) = q(L-x), \quad M(x) = -\frac{q(L-x)^2}{2}$$

3. Calculer la flèche en bout

L'intégration de la courbure avec $v(0) = 0$ et $v'(0) = 0$ mène à la flèche maximale en $x = L$.

$$|M|_{\max} = \frac{qL^2}{2} = 0,72 \text{ kN m}, \quad f_{\max} = \frac{qL^4}{8EI} = 0,432 \text{ mm}$$



Profils qualitatifs ; amplitudes normalisées indépendamment.

Résultat et interprétation

Moment maximal en A ; flèche de 0,432 mm

Point de vigilance. La charge équivalente donne les réactions, mais une force qL placée au milieu ne donne pas la même déformée.

SYNTHÈSE

Le bon modèle, la bonne formule

Formules pour les cas précis de ce guide ; E, G, A, I et J constants.

Traction uniforme

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

Thermique, blocage total

$$\sigma = -E\alpha\Delta T$$

$$\delta_{\text{total}} = 0$$

Torsion circulaire

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Tr_{\text{ext}}}{J}$$

$$\theta = \frac{TL}{GJ}$$

Poutre, P au centre

$$M_{\text{max}} = \frac{PL}{4}$$

$$f_{\text{max}} = \frac{PL^3}{48EI}$$

Poutre, P à x = a

$$M_{\text{max}} = \frac{Pab}{L}$$

$$f(a) = \frac{Pa^2b^2}{3EIL}$$

Poutre, q uniforme

$$M_{\text{max}} = \frac{qL^2}{8}$$

$$f_{\text{max}} = \frac{5qL^4}{384EI}$$

Console, P en bout

$$|M|_{\text{max}} = PL$$

$$f_{\text{max}} = \frac{PL^3}{3EI}$$

Console, q uniforme

$$|M|_{\text{max}} = \frac{qL^2}{2}$$

$$f_{\text{max}} = \frac{qL^4}{8EI}$$

Caractéristiques géométriques des sections

$$I_{\text{rectangle}} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{\text{cercle}} = \frac{\pi d^4}{64}, \quad J_{\text{tube}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

EXERCICES

Exercices de vérification

Reprendre les modèles des cas résolus avant de consulter les réponses.

01 / Traction

Une barre de $L = 800 \text{ mm}$, $A = 250 \text{ mm}^2$ et $E = 200\,000 \text{ MPa}$ porte $P = 25 \text{ kN}$. Calculer σ et δ .

02 / Torsion

Un arbre plein de $d = 30 \text{ mm}$ et $L = 500 \text{ mm}$ transmet $T = 200 \text{ N}\cdot\text{m}$. Prendre $G = 80\,000 \text{ MPa}$. Calculer τ_{max} et θ .

03 / Poutre sur appuis

Une charge $P = 8 \text{ kN}$ est centrée sur $L = 2\,000 \text{ mm}$. Prendre $E = 200\,000 \text{ MPa}$ et $I = 5 \times 10^6 \text{ mm}^4$. Trouver les réactions, M_{max} et f_{max} .

04 / Console

Une console de $L = 800 \text{ mm}$ porte $P = 500 \text{ N}$ en bout. $E = 200\,000 \text{ MPa}$ et $I = 2 \times 10^6 \text{ mm}^4$. Trouver $|M|_{\text{max}}$ et f_{max} .

05 / Température

Une barre totalement bloquée possède $E = 70\,000 \text{ MPa}$ et $\alpha = 23 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$. La température augmente de $30 ^\circ\text{C}$. Trouver σ .

RÉPONSES RAPIDES

01. $\sigma = 100 \text{ MPa}$; $\delta = 0,400 \text{ mm}$.

02. $J = 79\,522 \text{ mm}^4$; $\tau_{\text{max}} = 37,73 \text{ MPa}$; $\theta = 0,01572 \text{ rad} = 0,901^\circ$.

03. $R_A = R_B = 4 \text{ kN}$; $M_{\text{max}} = 4 \text{ kN}\cdot\text{m}$; $f_{\text{max}} = 1,333 \text{ mm}$.

04. $|M|_{\text{max}} = 0,400 \text{ kN}\cdot\text{m}$; $f_{\text{max}} = 0,213 \text{ mm}$.

05. $\sigma = -48,3 \text{ MPa}$, en compression.

POUR ALLER PLUS LOIN

Vérifier avant de conclure

Une bonne valeur numérique doit aussi avoir un sens physique.

1. Équilibre global

La somme des forces et des moments doit être nulle. Pour une poutre sur appuis, la somme des réactions égale la charge verticale totale.

2. Conditions aux limites

Un appui simple bloque la translation verticale mais laisse tourner la poutre. Un encastrement bloque la translation et la rotation. Au bout libre sans couple appliqué, $M = 0$.

3. Ordre de grandeur

En élasticité linéaire, doubler la charge double la contrainte et la flèche. Augmenter la hauteur d'une section rectangulaire augmente I suivant h^3 .

4. Portée des calculs

La vérification d'une pièce réelle peut aussi exiger résistance admissible, facteur de sécurité, fatigue, flambement, concentrations de contraintes, assemblages et exigences de service.

RÉFÉRENCES POUR APPROFONDIR

David Roylance, Mechanics of Materials, MIT OpenCourseWare, cours 3.11, automne 1999. Modules : Introduction to Elastic Response ; Shear and Torsion ; Shear and Bending Moment Diagrams ; Stresses in Beams ; Beam Displacements.

Accéder aux modules du MIT OpenCourseWare

Les exemples numériques, la rédaction et les schémas de ce guide sont originaux. Les références sont proposées pour l'étude des principes ; aucun visuel des captures fournies n'a été reproduit.